

همگرایی کامل گشتاوری برای متغیرهای تصادفی *NSD*و آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی *END*سودابه لطفیان^۱^۱ کارشناس ارشد آمار ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز، تهران، ایران

چکیده

در این مقاله، دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی و همچنین دنباله‌ای از اعداد حقیقی را در گام اول، در نظر گرفته، سپس مجموع متغیرهای تصادفی را که توسط اعداد حقیقی، موزون شده‌اند را تشکیل داده و به بررسی همگرایی این متغیرها می‌پردازیم. همچنین، دو بردار تصادفی و تابع دیگری را در نظر می‌گیریم که دامنه این تابع فضای اقلیدسی چند بعدی و برد آن فضای حقیقی باشد. بدین ترتیب، ابتدا ماکسیمم متغیرهای دو بردار را به صورت نظیر به نظیر در نظر گرفته و این تابع را اثر می‌دهیم. در گام دوم، مینیمم متغیرهای دو بردار، نظیر به نظیر در نظر گرفته شده و مجدداً اثر این تابع بر آن را بررسی و ارزیابی می‌کنیم. سپس نتایج حاصل با همدیگر جمع می‌شوند. در مرحله بعد این تابع را روی دو بردار تصادفی به طور جداگانه تعریف کرده و نهایتاً، مجموع این دو مقدار را پیدا می‌کنیم. چنانچه، مجموع تعریف شده در ابتدا از مجموع تعریف شده در مرحله دوم بیشتر یا مساوی باشد، آنگاه تابع را زبرجمعی می‌نامیم. بررسی شرایط لازم و کافی برای همگرایی کامل دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی وابسته منفی و همچنین همگرایی کامل گشتاوری برای این دنباله از متغیرهای تصادفی و نهایتاً مقایسه این دو نوع همگرایی است. از آنجایی که همگرایی کامل گشتاوری قوی‌تر از همگرایی کامل است، لذا این تحقیق نتایج بسیار جامع و کاربردی را برای این گونه از متغیرهای تصادفی خواهد داشت. با به دست آوردن شرایط و مفروضات لازم برای برقراری همگرایی کامل بالطبع همگرایی قوی و همگرایی ضعیف نیز برقرار خواهد بود. وابستگی زیر جمعی منفی *NSD* و کاربردهای آن، به طور ویژه‌ای در این تحقیق مورد نظر هستند. در انتها، نتایج نشان می‌دهند که با توجه به اثبات قضایای مرتبط با همگرایی کامل گشتاوری، نتایج سایر تحقیقات دیگر در همین زمینه بسط داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: اعداد حقیقی، متغیرهای تصادفی، همگرایی گشتاوری کامل، تابع، متغیر وابسته منفی زیر جمعی.

مقدمه

با این فرض که اگر خانواده یا به عبارت دیگر، دنباله‌ای متناهی از متغیرهای تصادفی داشته باشیم و اثر توابعی غیرنزولی بر این متغیرهای تصادفی را تشکیل دهیم، چنانچه کوواریانس این توابع مقداری منفی یا صفر باشند، می‌توان گفت در این صورت چنین متغیرهای تصادفی وابسته منفی هستند. بنابراین، از یک طرف، در این مقاله، در گام اول دنباله‌ای از اعداد حقیق و همچنین متغیرهای تصادفی روی فضای احتمال در نظر گرفته می‌شوند، سپس مجموع موزون متغیرهای تصادفی را تشکیل داده و به بررسی همگرایی این متغیرها می‌پردازیم. از طرف دیگر، دو بردار تصادفی و تابعی دیگر را در نظر می‌گیریم که دامنه این تابع فضای اقلیدسی چند بعدی و برد آن فضای حقیقی باشد ابتدا ماکسیمم متغیرهای دو بردار را نظیر به نظیر در نظر گفته و این تابع را اثر می‌دهیم. ار ادامه، مینیمم متغیرهای دو بردار را نظیر به نظیر گرفته و مجدداً اثر این تابع بر آن را پیدا می‌کنیم. نتایج بدست آمده را با یکدیگر جمع می‌کنیم. در مرحله بعدی این تابع را روی دو بردار تصادفی به طور جداگانه تعریف کرده و مجموع این دو مقدار را نیز بدست می‌آوریم. اگر مجموع بدست آمده در ابتدا از مجموع تعریف شده در مرحله دوم بیشتر یا مساوی باشد، آنگاه تابع را زبرجمعی می‌نامیم. همچنین اگر امید ریاضی تابع زبرجمعی برای بردار تصادفی کمتر یا مساوی امید ریاضی تابع زبرجمعی برای هر بردار تصادفی دلخواه دیگر باشد به طوری که مستقل از بردار اولیه نیز باشد ولی متغیرهای آن هم‌توزیع باشند، در این صورت بردار در نظر گرفته شده اولیه را وابسته منفی زبرجمعی می‌گوییم. با در نظر گرفتن این مفاهیم، حال دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی وابسته منفی زبرجمعی را در نظر گرفته همچنین دنباله‌ای صعودی و مثبت از اعداد حقیقی را در نظر می‌گیریم. سپس تابعی مثبت و زوج با این شرط که حاصل تقسیم این تابع به قدر مطلق مرتبه q ام صعودی و حاصل تقسیم آن به مقدار مطلق مرتبه p ام نزولی باشد هرگاه q کمتر از p و بیشتر یا مساوی یک باشد در نظر می‌گیریم. در این صورت اگر امید ریاضی متغیرهای تصادفی برابر با صفر باشد، و امید ریاضی حاصل تقسیم تابعی از این متغیر تصادفی به تابعی از اعداد ثابت را تشکیل دهیم، مجموع متناهی آن را بدست آوریم و سری نامتناهی این مجموع همگرا باشد، آن‌گاه می‌توان همگرایی کامل گشتاوری را نتیجه گرفت. در این تحقیق، بررسی شرایط لازم و کافی برای همگرایی کامل دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی وابسته منفی و همچنین همگرایی کامل گشتاوری برای این دنباله از متغیرهای تصادفی و نهایتاً مقایسه این دو نوع همگرایی، از جمله اهداف اصلی است. از آنجایی که همگرایی کامل گشتاوری قوی‌تر از همگرایی کامل است، لذا این مقاله، نتایج بسیار جامع و کاربردی را برای این گونه از متغیرهای تصادفی خواهد داشت. با به دست آوردن شرایط و مفروضات لازم برای برقراری همگرایی کامل بالطبع همگرایی قوی و همگرایی ضعیف نیز برقرار خواهد بود. لازم به ذکر است که از آنجایی که متغیرهای تصادفی در آمار به دو صورت مستقل یا وابسته وجود دارند، بنابراین قضایای زیادی در مورد متغیرهای تصادفی مستقل ثابت شده است ولی در عمل همیشه متغیرهای تصادفی مستقل نیستند و در بیشتر موارد وابسته‌اند. آنچه که در این تحقیق به عنوان متغیرهای اولیه در نظر گرفته شده متغیرهای تصادفی وابسته هستند. از طرفی، همگرایی را ضعیف می‌گوییم هرگاه این همگرایی در احتمال برقرار باشد و چنانچه این همگرایی به صورت قریب به یقین یا تقریباً همه جا باشد آنگاه همگرایی حاصل را همگرایی قوی می‌گوییم.

مدل بکار گرفته شده در تحقیق حاضر، بنیادی و از نوع نظری می‌باشد. در واقع، با گردآوری آخرین مقالات منتشر شده در رابطه با موضوع تحقیق از معتبرترین مجلات، به مطالعه آنها پرداخته و با دستیابی به مرزهای دانش در رابطه با موضوع با روش نظری و نیز اصول ریاضی به بررسی رابطه بین مطالب اثبات شده در این مقاله پرداخته و مسیر پیشرفت موضوع به ویژه طی ۱۰ سال اخیر بر اساس تحقیقات منتشر شده مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است. با توجه به اینکه موضوع تحقیق دارای بعد پیشرفته نظری می‌باشد، لذا جهت دستیابی به آخرین تحقیقات و رسیدن به مرز دانش روش تحقیق کتابخانه‌ای و تطبیقی انتخاب شده است یعنی با استفاده از سایت‌های معتبر علمی جدیدترین مقالات در این رابطه استخراج شده است و سپس مقالات و کتب به کار برده شده در مقاله اصلی را نیز جمع‌آوری کرده و با تحلیل مطالب، نتیجه‌گیری صورت می‌پذیرد. در ادامه به تعریف گشتاور و بررسی متغیرهای تصادفی نیز پرداخته می‌شود.

۱-۱ تعریف گشتاورها

برخی از مهم ترین اطلاعات مفید مرتبط با متغیرهای تصادفی توسط گشتاورها به ویژه گشتاورهای مرتبه اول و دوم مشخص می شود. بنابراین، تعریف گشتاورها را نیز در این مقاله مورد بررسی قرار می دهیم و در ادامه نیز چند همگرایی را مطرح می کنیم که برای محاسبه مقادیر در ارائه کران ها نقش مهمی دارند. نشان می دهیم که $-n$ امین گشتاور متغیر تصادفی X که با α_n نمایش داده می شود، به صورت رابطه (۱) تعریف می شود:

(۱)

$$\alpha_n = E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx,$$

۱-۱-۱ متغیرهای تصادفی مرتبه دوم

چنانچه متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, X_3, \dots$ ، که دارای دومین گشتاور $E(X_1^2), E(X_2^2), E(X_3^2), \dots$ و به صورت متناهی تعریف شده باشند، متغیرهای تصادفی مرتبه دوم نامیده می شوند.

۲-۱-۱ متغیرهای تصادفی وابسته منفی

یک فضای احتمال مانند (Ω, F, P) و دنباله ای از متغیرهای تصادفی تعریف شده روی آن را به صورت $\{X_n, n \geq 1\}$ که در نظر گرفتن رابطه استقلال یا وابستگی در آمار و احتمال برای آن، نقش تعیین کننده ای ایفا می کند را فرض کنید. استقلال متغیرهای تصادفی یک ویژگی قوی است اما در دنیای واقعی، پدیده های مختلف و متعددی به یکدیگر وابسته هستند.

بنابراین علاوه بر مطالعه استقلال متغیرهای تصادفی، برخی دیگر از رده های وابستگی که می تواند شامل مارتینگل^۱، m -وابستگی^۲، ρ -آمیخته^۳، ϕ -آمیخته^۴، وابستگی منفی^۵ و وابستگی مثبت^۶ نیز باشد را در نظر گرفته بگیریم. در ادامه این مطلب، به دو نوع از ساختارهای وابستگی که شامل پیوندی منفی^۷ و وابسته زیر جمعی منفی^۸ برای مجموعه متغیرهای تصادفی هستند و طی سال های اخیر، توجه و علاقه بسیاری از نویسندگان را به خود جلب کرده اند نیز می پردازیم. در همین راستا، ابتدا چند وابستگی مربوط به این دو ساختار که برگرفته از نتایج حاصل از تحقیق جاج و پروشان (۱۹۸۳) و هو (۲۰۰۰) هستند، معرفی می شوند.

۳-۱-۱ متغیرهای تصادفی وابسته منفی توسعه یافته

تحقیقی که توسط (لیو ۲۰۰۹) انجام شده است، نشان می دهد که یک مجموعه متناهی از متغیرهای تصادفی حقیقی $\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$ ، متغیر تصادفی وابسته منفی توسعه یافته^۹ که به اختصار تحت عنوان (END) نیز شناخته می شوند

^۱ Martingale^۲ m-dependence^۳ ρ -mixed^۴ ϕ -mixed^۵ Negative Dependence (ND)^۶ Positive Dependence (PD)^۷ Negative Association (NA)^۸ Negatively Superadditive Dependence (NSD)^۹ Extended Negatively Dependent (END)

می باشد، با این شرط که اگر $M > 0$ وجود داشته باشد آن گاه دو نابرابری زیر برای هر X_i حقیقی بر اساس معادلات نشان داده شده در روابط (۲) و (۳)، $1 \leq i \leq n$ برقرار باشند:

$$P(X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n) \leq M \prod_{i=1}^n P(X_i > x_i) \quad (2)$$

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \leq M \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x_i) \quad (3)$$

در تحقیق دیگری، (جاج و پروشان ۱۹۸۳)، یک دنباله متناهی از متغیرهای تصادفی END را در صورتی که هر زیر دنباله متناهی از آن END باشد، نشان داده اند. (لهمن، ۱۹۶۶) در پژوهش خود نشان داده است اگر دو نابرابری (۲) و (۳) به ازای هر $M = 1$ برقرار باشند، آن گاه دنباله $\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$ وابسته منفی است.

۴-۱-۱ متغیرهای تصادفی پیوند منفی

نتایج مختلفی در آمار و احتمال تحت این فرض که برخی از متغیرهای تصادفی دارای پیوند منفی (NA) هستند، توسط آلام و سکنا (۱۹۸۱) معرفی شده اند و جاج و پروشان (۱۹۸۳) آن ها را به دقت مورد مطالعه قرار داده اند. یک دنباله متناهی از متغیرهای تصادفی $\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$ ، NA نامیده می شود، اگر برای هر جفت زیر مجموعه جدا از هم A_1 و A_2 ، $\{1, 2, \dots, n\}$ و همچنین، در صورتی که دو تابع f_1 و f_2 صعودی باشند و کواریانس تعریف شده در رابطه (۴) وجود داشته باشد، بتوان معادله را به صورت زیر نوشت:

$$\text{cov}(f_1(X_i, i \in A_1), f_2(X_j, j \in A_2)) \leq 0 \quad (4)$$

بر اساس نتایج حاصل از تحقیق، (جاج و پروشان) اگر توابع f_1 و f_2 نزولی باشند، آن گاه نابرابری (۴) نیز برقرار است. لازم به ذکر است که یکی از مزیت های متغیرهای تصادفی دارای پیوند منفی، این است که توابع f_1 و f_2 در رابطه (۴) می توانند صورت های مختلفی داشته باشند و این نتیجه به بسیاری از نابرابری ها چند متغیره مفید منجر می شود. بنابراین، بدون از دست دادن کلیت مفهوم، می توان فرض کرد $A_1 \cup A_2 = \{1, 2, \dots, n\}$ است. همچنین یک دنباله متناهی، پیوند منفی است اگر هر زیر دنباله متناهی از آن پیوند منفی باشد. در ادامه، چند ویژگی برای متغیرهای تصادفی NA که پیش تر توسط جاج و پروشان (۱۹۸۳) در پژوهشی بیان شده است نیز اشاره می کنیم.

- فرض کنید $A_1, A_2, \dots, A_m$ زیر مجموعه های مجزا $\{1, 2, \dots, n\}$ و همچنین $f_1, f_2, \dots, f_m$ توابع صعودی باشند. در این حالت NA بودن $X_1, X_2, \dots, X_n$ ، معادل است با روابط (۵) و (۶):

$$P(X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n) \leq P(X_i > x_i, i \in A_1) P(X_j > x_j, j \in A_2) \quad (5)$$

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \leq P(X_i \leq x_i, i \in A_1) P(X_j \leq x_j, j \in A_2). \quad (6)$$

- یک زیر مجموعه دو تایی یا بیشتر از متغیرهای تصادفی NA، NA است.
- توابع صعودی تعریف شده روی مجموعه های جدا از هم یک مجموعه از متغیرهای تصادفی NA، NA هستند.
- اجتماع مجموعه های مستقل از متغیرهای تصادفی NA، NA است.

متغیرهای تصادفی $X_1, \dots, X_n$ را زیر وابسته منفی از پایین ^{۱۰} (LND) می نامند، اگر که برای تمام مقادیر حقیقی $x_1, \dots, x_n$ ، رابطه (۷) برقرار باشد:

$$P\left[\bigcap_{j=1}^n (X_j \leq x_j)\right] \leq \prod_{j=1}^n P[X_j \leq x_j] \quad (۷)$$

همچنین، متغیرهای تصادفی $X_1, \dots, X_n$ را زیر وابسته منفی از بالا ^{۱۱} (UND) می نامند، اگر که برای تمام مقادیر حقیقی $x_1, \dots, X_n$ ، رابطه (۸) برقرار باشد:

$$P\left[\bigcap_{j=1}^n (X_j > x_j)\right] \leq \prod_{j=1}^n P[X_j > x_j] \quad (۸)$$

متغیرهای تصادفی $X_1, \dots, X_n$ را وابسته منفی (ND) نامند، اگر LND و UND باشند. متغیرهای تصادفی $X_1, \dots, X_n$ را دو به دو وابسته منفی ^{۱۲} PND گوئیم اگر که برای هر $i \neq j$ داشته باشیم که X_i و X_j وابسته منفی باشند. همانطور که قبلاً نیز بیان شد، هرگاه $X_1, \dots, X_n$ پیوند منفی NA باشند، می توان رابطه (۹) را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\text{cov}\left(f_1(X_i, i \in A_1), g(X_j, j \in A_2)\right) \leq 0 \quad (۹)$$

به طوری که در رابطه فوق، f و g توابعی صعودی هستند. حال، اگر f و g نزولی باشند نیز، رابطه (۱۰) برقرار است:

$$\text{cov}\left(-f(X_i, i \in A_1), -g(X_j, j \in A_2)\right) = \text{cov}\left(f(X_i, i \in A_1), g(X_j, j \in A_2)\right) \leq 0 \quad (۱۰)$$

متغیرهای تصادفی $X_1, \dots, X_n$ را به طور خطی وابسته منفی ^{۱۳} LIND گوئیم اگر برای هر دو مجموعه مجزای A و B از $\{1, 2, \dots, n\}$ و اعداد حقیقی مثبت $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ متغیرهای تصادفی $\sum_{j \in A} \lambda_j X_j$ و $\sum_{k \in B} \lambda_k X_k$ پیوند منفی باشند. ذکر این نکته ضروری است که دنباله $\{X_n, n \geq 1\}$ از متغیرهای تصادفی در هر مفهوم از مفاهیم فوق با این شرط که هر تعداد متناهی از آنها وابستگی داشته باشند، وابسته در نظر گرفته می شود. یادآور می شویم که ویژگی وابسته منفی (ND)، پیوند منفی (NA) را نتیجه نمی دهد. برای اثبات این ادعا، تحقیق (امینی ۲۰۰۳) را بررسی می کنیم. فرض کنید X_1, X_2, X_3 سه متغیر تصادفی تعریف شده بر روی فضای احتمال $([0, 1], B, P)$ باشند و $X_1(w) = I_{[0, \frac{1}{2}]}(w)$ و $X_2(w) = I_{[\frac{3}{10}, \frac{8}{10}]}(w)$ و $X_3(w) = I_{[\frac{4}{10}, \frac{6}{10}] \cup [\frac{8}{10}, 1]}(w)$. بنابراین، متغیرهای تصادفی X_1, X_2, X_3 وابسته منفی (ND) می باشند، ولی اگر توابع غیرنزولی (نسبت به هر مولفه) f و g را به صورت روابط (۱۱)، (۱۲) و (۱۳) در نظر بگیریم، داریم:

^۱ Lower Negative Dependence (LND)

^۱ Upper Negative Dependence (UND)

^۲ Pairwise Negative Dependent (PND)

^۳ Linearly Negative Dependent (LIND)

$$\begin{aligned}
P(QQ0) &= 0 \\
P(Q10) &= \frac{2}{10} \\
P(QQ1) &= \frac{2}{10} \\
P(1Q1) &= 0 \\
P(1Q0) &= \frac{3}{10} \\
P(Q11) &= \frac{1}{10} \\
P(110) &= P(111) = \frac{1}{10}
\end{aligned} \tag{۱۱}$$

$$f(X_1, X_2) = \begin{cases} 1 & X_1 > \frac{1}{2}, X_2 > \frac{1}{2} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \tag{۱۲}$$

و

$$\begin{aligned}
g(X_3) &= I_{\left(\frac{1}{2}, \infty\right)}(X_3) \\
&= P\left[\bigcap_{i=1}^3 \left(X_i > \frac{1}{2}\right)\right] - P\left[X_1 > \frac{1}{2}, X_2 > \frac{1}{2}\right] \cdot P\left[X_3 > \frac{1}{2}\right] \text{Cov}(f(X_1, X_2), g(X_3)) \\
&= \frac{1}{10} - \frac{2}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{2}{100} > 0
\end{aligned} \tag{۱۳}$$

در نتیجه X_1, X_2, X_3 پیوند منفی نیستند.

در پژوهش دیگری، (جوآگ-دو^{۱۴}-۱۹۸۳) نشان داده‌اند که اگر فرض شود X, Y بردارهای مستقل پیوند منفی باشند، آنگاه اجتماع مجموعه‌هایی از متغیرهای تصادفی نیز پیوند منفی می‌باشد. برای اثبات این ادعا نشان می‌دهیم که بردار (X, Y) پیوند منفی می‌باشد. فرض کنید که (X_1, X_2) و (Y_1, Y_2) افرازهای دلخواهی از X و Y باشند. فرض کنید که f, g توابع صعودی دلخواهی باشند. می‌دانیم که $E\{f(X_1, Y_1) | Y_1\}$ یک تابع Y_1 اندازه‌پذیر بوده که تقریباً همواره برقرار است. نتیجه مشابهی نیز برای $E\{g(X_2, Y_2) | Y_2\}$ برقرار است. این امیدهای شرطی را به ترتیب با $h_1(Y_1)$ و $h_2(Y_2)$ نشان می‌دهیم و توجه کنید که h_1, h_2 صعودی می‌باشند. بنابراین رابطه (۱۴)، باید مانند آنچه در ادامه مشاهده می‌شود، برقرار باشد:

$$\begin{aligned}
E\{f(X_1, Y_1) | Y_1, Y_2\} &= E\{f(X_1, Y_1) | Y_1\} \\
E\{f(X_1, Y_1)g(X_2, Y_2)\} &= E[E\{f(X_1, Y_1)g(X_2, Y_2) | Y_1, Y_2\}]
\end{aligned} \tag{۱۴}$$

^۱ Joag-Dev

$$\begin{aligned} &\leq E\{h_1(Y_1)h(Y_2)\} \leq E\{h_1(Y_1)\}E\{h_2(Y_2)\} \\ &= E\{f(X_1, Y_1)\}E\{g(X_2, Y_2)\} \end{aligned}$$

به طوری که نامساوی اول از این واقعیت که (X_1, X_2) از (Y_1, Y_2) مستقل بوده و از همین رو، پیوند منفی تحت شرط حفظ می شود. نامساوی دوم نیز زمانی که (Y_1, Y_2) پیوند منفی باشد، برقرار است.

۱-۱-۵ ویژگی های متغیرهای تصادفی وابسته زبر جمعی منفی

در زیر به برخی ویژگی های متغیرهای تصادفی وابسته زبر جمعی منفی NSD، بدون بیان برهان، اشاره می کنیم. برای کسب اطلاعات بیشتر به مطالعه هو (۲۰۰۰) مراجعه شود. بدین ترتیب، دنباله $\{X_n, n \geq 1\}$ را دنباله ای از متغیرهای تصادفی وابسته زبر جمعی منفی NSD گویند، اگر برای هر $n \geq 1$ بردار تصادفی $X_1, \dots, X_n$ ، NSD باشد. آرایه $\{X_{ni}, n \geq 1, i \geq 1\}$ را آرایه ای از متغیرهای تصادفی وابسته زبر جمعی منفی ردیفی گویند، اگر برای هر $n \geq 1$ ، $\{X_{ni}, n \geq 1, i \geq 1\}$ ، وابسته زبر جمعی منفی باشد. وابستگی پیوند منفی یک زوج متغیر تصادفی با وابستگی زبر جمعی منفی آن معادل است. در تحقیق دیگری، (کریستوفیدز و واگلاتو، ۲۰۰۴)، نشان داده اند که اگر $X_1, \dots, X_n$ پیوندی منفی باشند، آن گاه NSD نیز هستند، ولی عکس آن همیشه برقرار نیست. برای اثبات این ادعا فرض کنید $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ و $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ دو بردار تصادفی مستقل باشند. اگر X و Y NSD باشند، آنگاه $(X_1, X_2, \dots, X_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ نیز NSD است.

۱-۲ متغیرهای تصادفی وابسته ضعیف

مفهوم دیگری که در این مقاله به آن اشاره می کنیم، یک رده از متغیرهای تصادفی وابسته است که به متغیرهای تصادفی وابسته منفی ضعیف^{۱۵} (WND) موسوم است. این رده از متغیرهای تصادفی وابسته برای اولین بار توسط رنجبر و همکاران (۲۰۰۸)، ارائه شده است. فرض کنید متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_n$ دارای تابع چگالی احتمال توام و توابع چگالی احتمال حاشیه ای به ترتیب $f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(\cdot)$ و $f_{X_i}(\cdot)$ ، $i=1, 2, \dots, n$ باشند، اگر برای اعداد حقیقی $x_1, x_2, \dots, x_n$ و x_n ضریب ثابت $M \geq 1$ وجود داشته باشد، به طوری که رابطه (۱۵) برقرار باشد:

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \quad (15)$$

متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_n$ را وابسته منفی ضعیف نامند. رده متغیرهای تصادفی وابسته منفی ضعیف، دسته بزرگی از متغیرهای تصادفی را در بر دارد که شامل دنباله متغیرهای تصادفی مستقل ($M=1$) نیز می باشد. فرض کنید (X, Y) یک بردار تصادفی با توزیع توام نیم نرمال^{۱۶} باشد. در این صورت تابع چگالی توأم (X, Y) برابر است با آنچه در رابطه (۱۶) نشان داده شده است:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2+y^2-2\rho xy)\right\}, \quad x,y>0 \quad (16)$$

^{۱۵} Weakly Negative Dependent (WND)

^{۱۶} half-normal

همچنین تابع چگالی حاشیه‌ای X (یا Y) عبارت است از:

$$f_X(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}, \quad x > 0 \quad (17)$$

اگر $-1 < \rho \leq 0$ ، آنگاه بر اساس رابطه (۱۸)، داریم:

$$\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)f_Y(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \exp\left\{-\frac{\rho^2}{2(1-\rho^2)}(x^2+y^2) + \frac{\rho}{1-\rho^2}xy\right\} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \quad (18)$$

بنابراین، رابطه (۱۹) به صورت زیر برقرار است:

$$f_{X,Y}(x,y) \leq M f_X(x) f_Y(y) \quad (19)$$

به طوری که در رابطه فوق، $M = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} > 1$. بنابراین (X,Y) WND است

به منظور اثبات ادعای فوق، فرض کنید (X,Y) یک بردار تصادفی با تابع چگالی احتمال توأم $f_{X,Y}(x,y)$ متعلق به خانواده‌ای با چگالی به صورت رابطه (۲۰)، باشد. در این صورت:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) [1 + \alpha(1-2F_X(x))(1-2F_Y(y))], \quad x,y \in \mathbb{R}, -1 \leq \alpha \leq 0 \quad (20)$$

به طوری که در رابطه فوق، $f_X(x)$ ، $f_Y(y)$ و $F_X(x)$ و $F_Y(y)$ به ترتیب توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X و Y و توابع توزیع حاشیه‌ای X و Y می‌باشند. از طرفی به راحتی می‌توان نشان داد که رابطه (۲۱) برقرار است:

$$|1 + \alpha(1-2F_X(x))(1-2F_Y(y))| \leq 1 + |\alpha| \quad (21)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$f_{X,Y}(x,y) \leq M f_X(x) f_Y(y) \quad (22)$$

به طوی که $M = 1 + |\alpha|$ در نتیجه (X,Y) WND است.

فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی وابسته منفی ضعیف باشند، آنگاه رابطه (۲۳) را به صورت معادلات زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i),$$

$$E\left(\prod_{i=1}^n h(X_i)\right) \leq M \prod_{i=1}^n E(h(X_i)) \quad (23)$$

به طوری که در رابطه فوق، $F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(\cdot)$ و $F_i(\cdot)$ به ترتیب تابع توزیع توأم و توابع توزیع حاشیه‌ای متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_n$ می‌باشند و $h(\cdot)$ تابعی حقیقی مقدار و نامنفی است. همچنین به عنوان یک برهان، براساس تعریف متغیرهای تصادفی WND، روابط (۲۴) و (۲۵) را به صورت زیر داریم:

(الف)

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} M \prod_{i=1}^n f_{X_i}(t_i) dt_1 dt_2 \dots dt_n \\
&= M \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{x_i} f_{X_i}(t_i) dt_i \\
&= M \prod_{i=1}^n F_i(x_i)
\end{aligned} \tag{۲۴}$$

(ب)

$$\begin{aligned}
E\left(\prod_{i=1}^n h(X_i)\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^n h(x_i) f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} M \prod_{i=1}^n h(x_i) \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\
&= M \prod_{i=1}^n E(h(X_i)) = M \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} h(x_i) f_{X_i}(x_i) dx_i
\end{aligned} \tag{۲۵}$$

۲- مفهوم همگرایی کامل گشتاوری

مثالی برای اثبات این موضوع که NSD مستلزم NA نیست، توسط هو (۲۰۰۰) ارائه شده است. بدین ترتیب، او این مسئله را در تحقیق خود به این صورت مطرح کرده است که آیا از NA بودن می توان NSD بودن را نیز نتیجه گرفت یا این چنین شرطی برقرار نیست.

علاوه بر این، هو (۲۰۰۰) برخی از خواص اولیه و سه قضیه ساختاری NSD را نیز ارائه کرده و از سوی دیگر، کریستوفایدس و واگلاتو (۲۰۰۴)، دیگر محققانی بوده اند که این مسئله را حل کرده و نشان داده اند که NA دلالت بر NSD دارد. مفهوم ساختار NSD ، یک توسیع از ساختار پیوند منفی است و گاهی اوقات این ساختار، کارآمدتر از ساختار پیوند منفی است، به طوری که می تواند برای بدست آوردن بسیاری از نابرابری های حائز اهمیت در احتمال مورد استفاده قرار گیرد. در خصوص اهمیت این موضوع می توان به نتایج حاصل از تحقیق اقبال و همکاران (۲۰۱۰)، نیز اشاره نمود که این محققان هم در پژوهش خودشان دو نامساوی ماکسیمال و قانون قوی اعداد بزرگ^{۱۷} از فرم های درجه دوم متغیرهای تصادفی NSD را با این فرض که $\{X_i, i \geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی نامنفی NSD با $EX_i^r < \infty$ برای هر $i \geq 1$ و $r > 1$ باشد، بدست آورده اند. همچنین در پژوهش دیگری که توسط (شن و همکاران) انجام شده، قضایای حدی قوی برای متغیرهای تصادفی NSD ارائه شده است. با توجه به توضیحات بیان شده تا این بخش از مقاله، در ادامه، همگرایی کامل گشتاوری را نیز ارائه کرده و چند لم در مورد آن ثابت می کنیم. بررسی بیشتر همگرایی کامل برای مجموع های موزون متغیرهای تصادفی NSD بدون توزیع یکسان، که برخی از نتایج شناخته شده متغیرهای تصادفی را تعمیم می دهد و بهبود می بخشد، از جمله اهداف مورد انتظار از این تحقیق می باشد.

^{۱۷} strong law large number

۱-۲ همگرایی کامل آرایه ای از متغیرهای NSD

بر اساس لم ۱-۲ فرض کنید $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1\}$ آرایه ای از متغیرهای تصادفی NSD باشد، که در آن $\{k_n, n \geq 1\}$ دنباله ای از اعداد صحیح مثبت است که $k_n \uparrow \infty$ وقتی $n \rightarrow \infty$ باشد، به طوری که $\{a_{ni}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1\}$ آرایه ای از اعداد صحیح مثبت و $\{a_n, n \geq 1\}$ نیز دنباله ای از ثابت های مثبت باشد. فرض کنید شرایط زیر برقرار باشند:

(۱) برای هر $\varepsilon > 0$ رابطه (۲۶) برقرار باشد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{i=1}^{k_n} P(|a_{ni} X_{ni}| > \varepsilon) < \infty \quad (26)$$

(۲) برای یک $\delta > 0$ ، وجود داشته باشد $q \geq 1$ به طوری که:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{i=1}^{k_n} \text{var} (a_{ni} X_{ni} I(|a_{ni} X_{ni}| \leq \delta)) \right)^q < \infty \quad (27)$$

آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، رابطه (۲۸) به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n P \left(\max_{1 \leq m \leq k_n} \left| \sum_{i=1}^m a_{ni} (X_{ni} - EX_{ni} I(|a_{ni} X_{ni}| \leq \delta)) \right| > \varepsilon \right) < \infty \quad (28)$$

برای اثبات ادعای فوق، می دانیم که برای هر $\varepsilon > 0$ و $n \geq 1$ ، رابطه (۲۹) را به صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned} & P \left(\max_{1 \leq m \leq k_n} \left| \sum_{i=1}^m a_{ni} (X_{ni} - EX_{ni} I(|a_{ni} X_{ni}| \leq \delta)) \right| > \varepsilon \right) \\ & \leq \sum_{i=1}^{k_n} P(|a_{ni} X_{ni}| > \delta) + P \left(\max_{1 \leq m \leq k_n} \left| \sum_{i=1}^m a_{ni} (X_{ni} I(|a_{ni} X_{ni}| \leq \delta) - EX_{ni} I(|a_{ni} X_{ni}| \leq \delta)) \right| > \varepsilon \right) \end{aligned} \quad (29)$$

بنابر شرط (۱) در بخش قبلی، کافی است نشان دهیم که:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_n P \left(\max_{1 \leq m \leq k_n} \left| \sum_{i=1}^m a_{ni} (X_{ni} I(|a_{ni} X_{ni}| \leq \delta) - EX_{ni} I(|a_{ni} X_{ni}| \leq \delta)) \right| > \varepsilon \right) < \infty. \quad (30)$$

برای $n \geq 1$ و $1 \leq i \leq k_n$ قرار دهید:

$$\begin{aligned} \gamma_{ni} &= \delta I(a_{ni} X_{ni} > \delta) + a_{ni} X_{ni} I(|a_{ni} X_{ni}| \leq \delta) - \delta I(a_{ni} X_{ni} < -\delta), \\ \gamma'_{ni} &= \delta I(a_{ni} X_{ni} > \delta) - \delta I(a_{ni} X_{ni} < -\delta). \end{aligned} \quad (31)$$

بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} a_n P \left(\max_{1 \leq m \leq k_n} \left| \sum_{i=1}^m a_{ni} (X_{ni} I(|a_{ni} X_{ni}| \leq \delta) - EX_{ni} I(|a_{ni} X_{ni}| \leq \delta)) \right| > \varepsilon \right) \\ & \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n P \left(\max_{1 \leq m \leq k_n} \left| \sum_{i=1}^m (\gamma'_{ni} - E\gamma'_{ni}) \right| > \varepsilon/2 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n P \left(\max_{1 \leq m \leq k_n} \left| \sum_{i=1}^m (\gamma'_{ni} - E\gamma'_{ni}) \right| > \varepsilon/2 \right) \\ & = I + J \end{aligned} \quad (32)$$

برای I بنابر نامساوی مارکوف^{۱۸} و شرط (۱)، رابطه (۳۳) را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$I \leq C \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{i=1}^{k_n} P(|a_{ni} X_{ni}| > \delta) < \infty \quad (33)$$

برای J ، قرار می دهیم $M_{2,n} = \sum_{i=1}^{k_n} \text{Var}(\gamma_{ni})$ ، بنابراین می توان نشان داد که:

$$M_{2,n} \leq \sum_{i=1}^{k_n} \text{Var}(a_{ni} X_{ni} I(|a_{ni} X_{ni}| \leq \delta)) + 8\delta^2 \sum_{i=1}^{k_n} P(|a_{ni} X_{ni}| > \delta). \quad (34)$$

برای هر $y > 0$ ، باید $d = \min\{1, y/6\delta\}$ را مانند روابط (۳۵) و (۳۶) قرار دهیم:

$$N_1 = \left\{ n : \sum_{i=1}^{k_n} P(|a_{ni} X_{ni}| > \min\{\delta, y/6\}) > d \right\} \quad (35)$$

$$N_2 = N \setminus N_1 = \left\{ n : \sum_{i=1}^{k_n} P(|a_{ni} X_{ni}| > \min\{\delta, y/6\}) \leq d \right\} \quad (36)$$

می دانیم که:

$$\sum_{n \in N_1} a_n P\left(\left|\sum_{i=1}^{k_n} (\gamma_{ni} - E\gamma_{ni})\right| > \delta/2\right) \leq \frac{1}{d} \sum_{n \in N_1} a_n \sum_{i=1}^{k_n} P(|a_{ni} X_{ni}| > \min\{\delta, y/6\}) < \infty \quad (37)$$

در ادامه ثابت می کنیم که رابطه (۳۸) برقرار است، بنابراین:

$$\sum_{n \in N_2} a_n P\left(\left|\sum_{i=1}^{k_n} (\gamma_{ni} - E\gamma_{ni})\right| > \epsilon/2\right) \leq \infty. \quad (38)$$

بر اساس لم ۱-۲، می دانیم که $\{\gamma_{ni} - E\gamma_{ni}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1\}$ آرایه ای از متغیرهای تصادفی NSD می باشد. همچنین

بر اساس بنابر لم ۲-۳، رابطه (۳۹) را به صورت زیر داریم:

$$\sum_{n \in N_2} a_n P\left(\max_{1 \leq m \leq k_n} \left|\sum_{i=1}^m (\gamma_{ni} - E\gamma_{ni})\right| > \epsilon/2\right) \quad (39)$$

$$\leq C \sum_{n \in N_2} a_n \sum_{i=1}^{k_n} P(|\gamma_{ni} - E\gamma_{ni}| \geq y) + C \sum_{n \in N_2} a_n (M_{2,n})^{\epsilon/24y}$$

$$\square CJ_1 + CJ_2.$$

با توجه به اثبات، رابطه (۴۰) را مانند آنچه در ادامه نشان داده شده است داریم:

$$P(|\gamma_{ni} - E\gamma_{ni}| \geq y) \leq P\left(\left|a_{ni} X_{ni} I(|a_{ni} X_{ni}| \leq \delta) - E a_{ni} X_{ni} I(|a_{ni} X_{ni}| \leq \delta)\right| > \frac{y}{2}\right) \quad (40)$$

$$+ P\left(\left|\gamma'_{ni} - E\gamma'_{ni}\right| > \frac{y}{2}\right).$$

می توان دید که برای $n \in N_2$ ، رابطه (۴۱) برقرار است:

^۱ markov inequality

$$\begin{aligned} |E_{ani} X_{ni} I(|a_{ni} X_{ni}| \leq \delta)| &\leq E|a_{ni} X_{ni}| I(|a_{ni} X_{ni}| \leq y/6) + E|a_{ni} X_{ni}| I(y/6 \leq |a_{ni} X_{ni}| \leq \delta) \\ &\leq y/6 + \delta \sum_{i=1}^{k_n} P(|a_{ni} X_{ni}| > \min\{y/6, \delta\}) \\ &\leq y/6 + \delta d \leq y/3 \end{aligned} \quad (41)$$

که مستلزم آن است که برای $n \in N_2$:

$$P(|\gamma_{ni} - E\gamma_{ni}| \geq y) \leq P\left(|a_{ni} X_{ni}| I(|a_{ni} X_{ni}| \leq \delta) > \frac{y}{6}\right) + P\left(|\gamma'_{ni} - E\gamma'_{ni}| > \frac{y}{2}\right). \quad (42)$$

بنابراین طبق نامساوی مارکوف و شرط (۱)، رابطه (۴۳) را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \sum_{n \in N_2} a_n \sum_{i=1}^{k_n} P\left(|a_{ni} X_{ni}| I(|a_{ni} X_{ni}| \leq \delta) > \frac{y}{6}\right) + \sum_{n \in N_2} a_n \sum_{i=1}^{k_n} P\left(|\gamma'_{ni} - E\gamma'_{ni}| > \frac{y}{2}\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{i=1}^{k_n} P\left(|a_{ni} X_{ni}| > \frac{y}{6}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{i=1}^{k_n} P(|a_{ni} X_{ni}| > \delta) \\ &< \infty. \end{aligned} \quad (43)$$

حال، ثابت می کنیم $J_2 < \infty$ اگر $n \in N_2$ داریم $\sum_{i=1}^{k_n} P(|a_{ni} X_{ni}| > \delta) \leq 1$ قرار می دهیم $Y = \in / 24q$ ، بنابر

شرط های (۱) و (۲)، داریم:

$$\begin{aligned} J_1 &\leq C \sum_{n \in N_2} a_n \left(\sum_{i=1}^{k_n} \text{Var}(a_{ni} X_{ni} I(|a_{ni} X_{ni}| \leq \delta)) \right)^q + C \sum_{n \in N_2} a_n \left(\sum_{i=1}^{k_n} P(|a_{ni} X_{ni}| > \delta) \right)^q \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{i=1}^{k_n} \text{Var}(a_{ni} X_{ni} I(|a_{ni} X_{ni}| \leq \delta)) \right)^q + C \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{i=1}^{k_n} P(|a_{ni} X_{ni}| > \delta) \\ &< \infty. \end{aligned} \quad (44)$$

در نتیجه، این اثبات کامل شد.

۳- لم های متغیر تصادفی تعمیم یافته END

برای دنباله ای از متغیرهای تصادفی وابسته منفی توسعه یافته (END) با استفاده از برخی از نتایج همگرایی کامل گشتاوری که توسط هو و تیلور (۱۹۹۷) بیان شده است به شرح این مطلب می پردازیم. از زمانی که مقاله لیو (۲۰۰۹) منتشر شد، خواص احتمالی برای متغیرهای END توسط چن و همکاران (۲۰۱۴-۲۰۱۲-۲۰۱۰)، وو و گووان (۲۰۱۲) و کیو و همکاران (۲۰۱۳) مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین، مفهوم متغیرهای تصادفی وابسته منفی (NOD) ^{۱۹} نیز توسط ابراهیمی و قوش (۱۹۸۱) معرفی شد.

تعریف ۳-۱: متغیرهای تصادفی $X_1, \dots, X_k$ که (NUOD) ^{۲۰} نیز نامیده می شوند، اگر برای هر $X_1, \dots, X_k$ حقیقی، رابطه (۴۵) برقرار باشد، داریم:

^۱ Negatively Orthant Dependent (NOD)

^۲ Negatively Upper Orthant Dependent (NUOD)

$$P(X_i > x_i, i=1, 2, \dots, k) \leq \prod_{i=1}^k P(X_i > x_i) \quad (45)$$

و $(NLOD)$ ^{۲۱} می نامیم، اگر رابطه (۴۶)، برقرار باشد:

$$P(X_i \leq x_i, i=1, 2, \dots, k) \leq \prod_{i=1}^k P(X_i \leq x_i) \quad (46)$$

متغیرهای تصادفی $X_1, \dots, X_k$ را NOD می نامیم، اگر هم $NLOD$ و هم $NUOD$ باشد. لی، محققى بوده است که ساختار وابسته منفی فوق را تعمیم داد و مفهوم متغیرهای تصادفی وابسته منفی تعمیم یافته (END) را معرفی کرد. در ادامه، به بررسی تعریف دیگری از متغیرهای تصادفی می پردازیم.

تعریف ۲-۳: متغیرهای تصادفی $\{X_i, i \geq 1\}$ را END خوانیم اگر ثابتی چون $M > 0$ وجود داشته باشد طوری که:

$$\begin{aligned} P(X_i \leq x_i, i=1, 2, \dots, n) &\leq M \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x_i), \\ P(X_i > x_i, i=1, 2, \dots, n) &\leq M \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x_i) \end{aligned} \quad (47)$$

برای هر $n=1, 2, \dots$ و هر $x_1, \dots, x_n$ برقرار باشد.

برای آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل $\{X_{nk}, 1 \leq k \leq n, n > 1\}$ ، فرض می کنیم که $\{a_n, n \geq 1\}$ یک دنباله ای از اعداد حقیقی مثبت با $a_n \uparrow \infty$ و $\{\psi(t)\}$ تابع مثبت روح باشد به نحوی که:

$$\frac{\psi(|t|)}{|t|^p} \uparrow, \quad \frac{\psi(|t|)}{|t|^{p+1}} \downarrow, \quad |t| \uparrow, \quad (48)$$

برای یک عدد صحیح نامنفی p . شرایط به صورت زیر داده می شوند:

$$EX_{nk} = 0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad n \geq 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{E\psi(X_{nk})}{\psi(a_n)} < \infty \quad (49)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n E \left(\frac{X_{nk}}{a_n} \right)^2 \right)^{2k} < \infty$$

به طوری که k در رابطه (۴۹)، یک عدد صحیح مثبت است.

^۲ Negatively Lower Orthant Dependent (NLOD)

لازم به توضیح است که در ارتباط با مفهوم فوق نتایج زیر قبلاً ثابت شده است:

قضیه ۳-۱: فرض کنید $\{X_{nk}, 1 \leq k \leq n, n \geq 1\}$ یک آرایه مثلثی از متغیرهای تصادفی مستقل سطری باشد و $\{\psi(t)\}$ در $|t| \uparrow$, $\frac{\psi(|t|)}{|t|^{p+1}} \downarrow$, $\frac{\psi(|t|)}{|t|^p} \uparrow$ برای عدد صحیحی چون $p > 2$ صدق کند. آنگاه از (۴۷)، (۴۸) و (۴۹)، رابطه (۵۰) نتیجه می شود که:

$$\frac{1}{\alpha_n} \sum_{k=1}^n X_{nk} \rightarrow 0 \quad (50)$$

اثبات قضیه ۳-۱، در [۱۹] توسط (کو و همکاران ۲۰۰۶) نشان داده شده است.

قضیه ۳-۲: فرض کنید $\{X_{nk}, 1 \leq k \leq n, n \geq 1\}$ یک آرایه مثلثی از متغیرهای تصادفی مستقل ردیفی باشد و $\{\psi(t)\}$ در (۶) برای عدد صحیحی چون $p = 1$ صدق کند. آنگاه از (۷) و (۸)، (۹) نتیجه می شود.

سونگ (۲۰۰۰)، گان و چن (۲۰۰۸-۲۰۰۷) و وو و ژو (۲۰۱۰) قضیه ۳-۱ و ۳-۲ را به ترتیب برای حالت های متغیرهای تصادفی NA و متغیرهای تصادفی NOD گسترش دادند. هدف از این مقاله، بررسی همگرایی گشتاوری و همگرایی میانگین برای آرایه های متغیرهای تصادفی END می باشد.

قضیه ۳-۳: فرض کنید $\{X_{nk}, 1 \leq k \leq n, n \geq 1\}$ آرایه ای از متغیرهای تصادفی END و $\{a_n, n \geq 1\}$ نیز یک دنباله از اعداد حقیقی مثبت با $a_n \uparrow \infty$ باشد. همچنین $\{\psi(t)\}$ تابع زوج مثبتی باشد که در شرط زیر صدق می کند:

$$\frac{\psi(|t|)}{|t|^q} \uparrow, \quad \frac{\psi(|t|)}{|t|^p} \downarrow, \quad |t| \uparrow \quad (51)$$

برای $1 \leq q < p$

(۱) اگر $1 < p \leq 2$ باشد، آنگاه از شرط های زیر نتیجه می شود که:

$$EX_{nk} = 0 \quad 1 \leq k \leq n, \quad n \geq 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{E\psi(X_{nk})}{\psi(a_n)} < \infty \quad (52)$$

برای $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-q} E \left\{ \left| \sum_{k=1}^n X_{nk} \right| - \varepsilon a_n \right\}_+^q < \infty \quad (53)$$

(۲) اگر $p > 2$ باشد، آنگاه مطابق با شرط های (روابط) (۴۷) و (۴۸) و رابطه (۵۴)،

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{EX_{nk}^2 I(|X_{nk}| \leq a_n)}{a_n^2} \right)^s < \infty \quad (54)$$

برای $s \geq 1$ ، رابطه فوق نتیجه گیری می شود.

قضیه ۳-۴: فرض کنید $\{X_{nk}, 1 \leq k \leq n, n \geq 1\}$ آرایه ای از متغیرهای تصادفی END بوده و $\{a_n, n \geq 1\}$ یک دنباله از اعداد مثبت با $a_n \uparrow \infty$ باشد. همچنین $\{\psi(t)\}$ تابع زوج مثبتی باشد که در (۵۱) برای $1 \leq q < p$ صدق می کند.

(۱) اگر $1 < p \leq 2$ ، آنگاه از

$$EX_{nk} = 0 \quad 1 \leq k \leq n, \quad n \geq 1 \quad (55)$$

$$P(X_i \leq x_i, i=1, 2, \dots, k) \leq \prod_{i=1}^k P(X_i \leq x_i) \sum_{k=1}^n \frac{E\psi(X_{nk})}{\psi(a_n)} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty \quad (56)$$

نتیجه می شود که:

$$a_n^{-1} \left| \sum_{k=1}^n X_{nk} \right| \xrightarrow{L^q} 0. \quad (57)$$

(۲) اگر $p > 2$ ، آنگاه از (۷)، (۱۴) و وقتی که $n \rightarrow \infty$

$$a_n^{-2} \sum_{k=1}^n EX_{nk}^2 I(|X_{nk}| \leq a_n) \rightarrow 0 \quad (58)$$

$$a_n^{-1} \left| \sum_{k=1}^n X_{nk} \right| \xrightarrow{L^q} 0. \quad \text{نتیجه می شود.}$$

از آنجایی که یک دنباله از مستقل متغیر تصادفی یک دنباله END خاص است، قضیه های ۱-۳ و ۲-۳ برای آرایه های متغیر تصادفی مستقل برقرارند. می دانیم که

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-q} \int_0^{\infty} P\left(\left|\sum_{k=1}^n X_{nk}\right| > \varepsilon a_n + t^{1/q}\right) dt \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-q} E\left\{\left|\sum_{k=1}^n X_{nk}\right| - \varepsilon a_n\right\}_+^q \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-q} \int_0^{(\varepsilon a_n)^q} P\left(\left|\sum_{k=1}^n X_{nk}\right| > \varepsilon a_n + t^{1/q}\right) dt \geq \varepsilon^q \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-q} \left(\left|\sum_{k=1}^n X_{nk}\right| > 2\varepsilon a_n\right), \\ &\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\sum_{k=1}^n X_{nk}\right| > 2\varepsilon a_n\right) < \infty \end{aligned} \quad (59)$$

برای اثبات قضیه های ۱-۳ و ۲-۳ نیاز به لم های زیر داریم که عبارتند از:

لم ۳-۱: فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله آرایه ای از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر بوده و $B_n > 0$ و $B_n = \sum_{k=1}^n EX_k^2 < \infty$ همچنین $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ ؛ آنگاه چنان ثابت $M > 0$ وجود دارد که:

$$P(|S_n| \geq x) \leq \sum_{k=1}^n P(|X_k| \geq y) + 2M \exp\left(\frac{x}{y} - \frac{x}{y} \log\left(1 + \frac{xy}{B_n}\right)\right) \quad (60)$$

برای $x > 0$ و $y > 0$

لم ۳-۲: فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی END با میانگین صفر بوده و $E|X_k|^p < \infty$ که در آن $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ فرض کنید $p \geq 2$ و $k = 1, 2, \dots, n$ ؛ آنگاه

$$E|S_n|^p \leq C \left\{ \sum_{k=1}^n E|X_k|^p + \left(\sum_{k=1}^n EX_k^2 \right)^{p/2} \right\}, \quad (61)$$

به طوری که در رابطه فوق، C یک ثابت است که تنها به p بستگی دارد و برای اثبات آن، کافی است، $B_n = \sum_{k=1}^n EX_k^2$ را با در نظر گرفتن رابطه (۶۲)، قرار می دهیم:

$$E|Y|^p = P \int_0^\infty P(|Y| \geq x) x^{p-1} dx \quad (E|Y|^p < \infty), \quad (62)$$

با در نظر گرفتن $y = x/P$ در (۴۸)، داریم:

$$\begin{aligned} +2Pe^p \int_0^\infty \left(1 + \frac{x^2}{PB_n}\right)^{-p} x^{p-1} dx &\leq P \sum_{k=1}^n \int_0^\infty P\left(|X_k| \geq \frac{x}{p}\right) x^{p-1} dx \\ E|S_n|^p &= P \int_0^\infty P(|S_n| \geq x) x^{p-1} dx \\ &= P^p \sum_{k=1}^n E|X_k|^p + e^p P^{1+p/2} B\left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right) \left(\sum_{k=1}^n EX_k^2\right)^{p/2} \end{aligned} \quad (63)$$

به طوری که بر اساس رابطه فوق، رابطه (۶۴) را به صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned} B(\alpha, \beta) &= \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \\ &= \int_0^\infty x^{\alpha-1} (1+x)^{-(\alpha+\beta)} dx. \end{aligned} \quad (64)$$

با قرار دادن $C = \max\{P^p, e^p P^{1+p/2} B(p/2, p/2)\}$ با استفاده از روابط (۶۱) به (۶۲) مراحل اثبات را به صورت زیر طی می کنیم.

$$\begin{aligned} E|S_n|^p &\leq C \left\{ \sum_{k=1}^n E|X_k|^p + \left(\sum_{k=1}^n EX_k^2 \right)^{p/2} \right\}, \\ E|Y|^p &= P \int_0^\infty P(|Y| \geq x) x^{p-1} dx \quad (E|Y|^p < \infty). \end{aligned} \quad (65)$$

۴- قضایای همگرایی کامل گشتاوری برای دنباله ای از متغیرهای تصادفی

ابتدا قضیه ۱-۴ را به این صورت بیان می کنیم که فرض کنید $\{X_{nk}, k \geq 1, n \geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی NSD باشد و همچنین یک دنباله از اعداد حقیقی مثبت داریم به نحوی که $a_n \uparrow \infty$ و $\{\Psi_k(t), k \geq 1\}$ یک

تابع مثبت که در شرط $|t| \uparrow$ $\frac{\psi_k(|t|)}{|t|^p} \downarrow$ و $\frac{\psi_k(|t|)}{|t|^q} \uparrow$ برای $1 \leq q < p \leq 2$ صدق می کند باشد. آن گاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n E \frac{\psi_k(X_{nk})}{\psi_k(a_n)} < \infty \quad \text{و} \quad EX_{nk} = 0 \quad k \geq 1, n \geq 1$$

تحت شرط های

برای $\varepsilon > 0$ ، رابط (۶۶) را داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-q} E \left\{ \max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{k=1}^j X_{nk} \right| - \varepsilon a_n \right\}_+^q < \infty \quad (66)$$

برای اثبات رابطه فوق، برای $n \geq 1$ از نماد $M_n(X) = \max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{k=1}^j X_{nk} \right|$ استفاده می کنیم. بنابراین، می توان رابطه (۶۷) را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-q} E \left\{ M_n(X) - \varepsilon a_n \right\}_+^q \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-q} \int_0^{\infty} P \left\{ M_n(X) - \varepsilon a_n > t^{1/q} \right\} dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-q} \left(\int_0^{a_n^q} P \left\{ M_n(X) > \varepsilon a_n + t^{1/q} \right\} dt + \int_{a_n^q}^{\infty} P \left\{ M_n(X) > \varepsilon a_n + t^{1/q} \right\} dt \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} P \left\{ M_n(X) > \varepsilon a_n \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-q} \int_{a_n^q}^{\infty} P \left\{ M_n(X) > t^{1/q} \right\} dt = I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (67)$$

برای اثبات قضیه (۱-۴) کافی است ثابت کنیم که $I_1 < \infty$ و $I_2 < \infty$. در نتیجه، آنها را مرحله به مرحله ثابت می کنیم. نخست، ثابت می کنیم که $I_1 < \infty$. بدین ترتیب، برای $n \geq 1$ ، رابطه (۶۸) را تعریف می کنیم:

$$X_k^{(n)} = X_{nk} I(|X_{nk}| \leq a_n), \quad T_j^{(n)} = \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^j (X_k^{(n)} - EX_k^{(n)}) \quad (68)$$

در این صورت برای هر $\varepsilon > 0$ ، داریم:

$$\begin{aligned} & P \left(\max_{1 \leq j \leq n} \left| \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^j X_{nk} \right| > \varepsilon \right) \\ &\leq P \left(\max_{1 \leq j \leq n} |X_{nk}| > a_n \right) + P \left(\max_{1 \leq j \leq n} |T_j^{(n)}| > \varepsilon - \max_{1 \leq j \leq n} \left| \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^j EX_k^{(n)} \right| \right) \end{aligned} \quad (69)$$

بر اساس، $|t| \uparrow$ و $\frac{\psi_k(|t|)}{|t|^p} \downarrow$ و $\frac{\psi_k(|t|)}{|t|^q} \uparrow$ و $EX_{nk} = 0$ $k \geq 1, n \geq 1$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{E|X_{nk}|^u I(|X_{nk}| > a_n)}{a_n^u} \right)^r < \infty \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n E \frac{\psi_k(X_{nk})}{\psi_k(a_n)} < \infty$$

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq j \leq n} \left| \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^j EX_k^{(n)} \right| &= \max_{1 \leq j \leq n} \left| \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^j EX_{nk} I(|X_{nk}| \leq a_n) \right| \\ &= \max_{1 \leq j \leq n} \left| \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^j EX_{nk} I(|X_{nk}| > a_n) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{E|X_{nk}| I(|X_{nk}| > a_n)}{a_n} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (70)$$

از

$$\begin{aligned} P \left(\max_{1 \leq j \leq n} \left| \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^j X_{nk} \right| > \varepsilon \right) &\leq P \left(\max_{1 \leq j \leq n} |X_{nk}| > a_n \right) + P \left(\max_{1 \leq j \leq n} |T_j^{(n)}| > \varepsilon - \max_{1 \leq j \leq n} \left| \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^j EX_k^{(n)} \right| \right) \end{aligned} \quad (71)$$

رابطه (۷۲)، نتیجه می شود که برای n به اندازه کافی بزرگ $n \rightarrow \infty$ ، داریم:

$$P \left(\max_{1 \leq j \leq n} \left| \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^j X_{nk} \right| > \varepsilon \right) \leq \sum_{k=1}^n P(|X_{nk}| > a_n) + P \left(\max_{1 \leq j \leq n} |T_j^{(n)}| > \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad (72)$$

بنابراین تنها لازم است ثابت کنیم که I و II برقرار هستند:

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n P(|X_{nk}| > a_n) < \infty \quad (73)$$

$$II = \sum_{n=1}^{\infty} P \left(\max_{1 \leq j \leq n} |T_j^{(n)}| > \frac{\varepsilon}{2} \right) < \infty \quad (74)$$

برای I از لم $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{E|X_{nk}|^u I(|X_{nk}| > a_n)}{a_n^u} \right)^r < \infty$ ، رابطه (۷۵) نتیجه می شود، که:

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n EI(|X_{nk}| > a_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{E|X_{nk}|^q I(|X_{nk}| > a_n)}{a_n^q} < \infty, \quad (75)$$

برای $r \geq 2$ ، II را اختیار می‌کنیم. چون $p \leq 2$ ، $r \geq p$ بنابر نابرابری مارکوف، لم

$$E \left(\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k X_i \right|^p \right) \leq 2^{3-p} \sum_{i=1}^n E |X_i|^p, \quad 1 < p \leq 2 \quad (76)$$

$$\text{و } C_r - \text{نابرابری و لم} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{E |X_{nk}|^u I(|X_{nk}| > a_n)}{a_n^u} \right)^r < \infty \quad \text{داریم:}$$

$$\begin{aligned} &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{-r} \frac{1}{a_n^2} \left[\sum_{k=1}^n E |X_k^{(n)}|^r + \left(\sum_{k=1}^n E |X_k^{(n)}|^2 \right)^{r/2} \right] II \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{-r} E \max_{1 \leq j \leq n} |T_j^{(n)}|^r \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{E |X_k^{(n)}|^r}{a_n^r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{E |X_k^{(n)}|^2}{a_n^2} \right)^{r/2} \quad (77) \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{E |X_k^{(n)}|^p I(|X_{nk}| \leq a_n)}{a_n^p} + C \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{E |X_k^{(n)}|^p I(|X_{nk}| \leq a_n)}{a_n^p} \right)^{r/2} \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{E |X_k^{(n)}|^p I(|X_{nk}| \leq a_n)}{a_n^p} + C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{E |X_k^{(n)}|^p I(|X_{nk}| \leq a_n)}{a_n^p} \right)^{r/2} < \infty \end{aligned}$$

سپس ثابت می‌کنیم که $I_2 < \infty$. از نمادهای $Y_{nk} = X_{nk} I(|X_{nk}| \leq t^{1/q})$ ، $Z_{nk} = X_{nk} - Y_{nk}$ ، و

$M_n(Y) = \max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{k=1}^j Y_{nk} \right|$ استفاده می‌کنیم، بنابراین رابطه (۷۸) را به صورت زیر داریم:

$$P \left\{ M_n(X) > t^{1/q} \right\} \leq \sum_{k=1}^n P \left\{ |X_{nk}| > t^{1/q} \right\} + P \left\{ M_n(Y) > t^{1/q} \right\} \quad (78)$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n a_n^{-q} \int_{a_n^q}^{\infty} P \left\{ |X_{nk}| > t^{1/q} \right\} dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-q} \int_{a_n^q}^{\infty} P \left\{ M_n(Y) > t^{1/q} \right\} dt \\ &= I_3 + I_4 \quad (79) \end{aligned}$$

$$\text{برای } I_3 \text{ بنابر لم} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{E |X_{nk}|^u I(|X_{nk}| > a_n)}{a_n^u} \right)^r < \infty \quad \text{داریم:}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n a_n^{-q} \int_{a_n^q}^{\infty} P\left\{|X_{nk}| I(|X_{nk}| > a_n) > t^{\frac{1}{q}}\right\} dt \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n a_n^{-q} \int_0^{\infty} P\left\{|X_{nk}| I(|X_{nk}| > a_n) > t^{\frac{1}{q}}\right\} dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{E|X_{nk}|^q I(|X_{nk}| > a_n)}{a_n^q} < \infty
\end{aligned} \tag{۸۰}$$

حال ثابت می‌کنیم که $I_4 < \infty$ نخست از $EX_{nk} = 0$ و $k \geq 1, n \geq 1$ لم
 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{E|X_{nk}|^u I(|X_{nk}| > a_n)}{a_n^u} \right)^r < \infty$ زمانی که $n \rightarrow \infty$ باشد، رابطه (۸۱)، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\leq \max_{t \geq a_n^q} t^{-\frac{1}{q}} \left| \sum_{k=1}^j E|X_{nk}| I(|X_{nk}| > t^{\frac{1}{q}}) \right| = \max_{t \geq a_n^q} \max_{a \leq j \leq n} t^{-\frac{1}{q}} \left| \sum_{k=1}^j EZ_{nk} \right| \max_{t \geq a_n^q} \max_{a \leq j \leq n} t^{-\frac{1}{q}} \left| \sum_{k=1}^j EY_{nk} \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^n a_n^{-1} E|X_{nk}| I(|X_{nk}| > a_n) \\
&\leq \sum_{k=1}^n \frac{E|X_{nk}|^q I(|X_{nk}| > a_n)}{a_n^q} \rightarrow 0
\end{aligned} \tag{۸۱}$$

بنابراین برای n به اندازه کافی بزرگ، برای $t \geq a_n^q$ رابطه (۸۲) را به صورت زیر داریم:

$$\max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{k=1}^j EY_{nk} \right| \leq \frac{t^{\frac{1}{q}}}{2} \tag{۸۲}$$

در این صورت برای n به اندازه کافی بزرگ داریم:

$$P\left\{M_n(Y) > t^{\frac{1}{q}}\right\} \leq P\left\{\max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{k=1}^j (Y_{nk} - EY_{nk}) \right| > \frac{t^{\frac{1}{q}}}{2}\right\} \quad t \geq a_n^q \tag{۸۳}$$

فرض کنید $d_n = [a_n] + 1$ بنابر لم زیرو $-C_r$ نابرابری، می‌توانیم ملاحظه کنیم که:

$$E(\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k (X_i) \right|^p) \leq 2^{3-p} \sum_{i=1}^n E|X_i|^p \quad 1 < p \leq 2 \tag{۸۴}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-q} \int_{a_n^q}^{\infty} t^{-2/q} E \left(\max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{k=1}^j (Y_{nk} - EY_{nk}) \right| \right)^2 dt \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-q} \int_{a_n^q}^{\infty} t^{-2/q} \sum_{k=1}^n (Y_{nk} - EY_{nk})^2 dt \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n a_n^{-q} \int_{a_n^q}^{\infty} t^{-2/q} EY_{nk}^2 dt \\
&= C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n a_n^{-q} \int_{a_n^q}^{\infty} t^{-2/q} EY_{nk}^2 I(|X_{nk}| \leq d_n) dt \\
&\quad + C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n a_n^{-q} \int_{a_n^q}^{\infty} t^{-2/q} EY_{nk}^2 I(d_n < |X_{nk}| \leq t^{1/q}) dt \\
&\square I_{41} + I_{42}
\end{aligned} \tag{۸۵}$$

برای I_{41} چون $q < 2$ داریم:

$$\begin{aligned}
I_4 &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n a_n^{-q} EX_{nk}^2 I(|X_{nk}| \leq d_n) \int_{a_n^q}^{\infty} t^{-2/q} dt \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{EX_{nk}^2 I(|X_{nk}| \leq d_n)}{a_n^2} \\
&= C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{EX_{nk}^2 I(|X_{nk}| \leq a_n)}{a_n^2} + C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{EX_{nk}^2 I(a_n < |X_{nk}| \leq d_n)}{a_n^2} \\
&\square I'_{41} + I''_{42}
\end{aligned} \tag{۸۶}$$

چون $q < 2$ ، بر اساس لم $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{E|X_{nk}|^u I(|X_{nk}| > a_n)}{a_n^u} \right)^r < \infty$ این نتیجه را می‌دهد که $I'_{41} < \infty$ است.

حال ثابت می‌کنیم که $I''_{41} < \infty$ چون $q < 2$ و $(a_n + 1)/a_n \rightarrow 1$ وقتی $n \rightarrow \infty$ ، بنا بر لم بیان شده داریم:

$$\begin{aligned}
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_n + 1}{a_n} \right)^{2-q} \frac{E|X_{nk}|^q I(|X_{nk}| > a_n)}{a_n^q} I''_{41} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{d_n^{2-q}}{a_n^2} E|X_{nk}|^q I(a_n < |X_{nk}| \leq d_n) \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{E|X_{nk}|^q I(|X_{nk}| \leq a_n)}{a_n^q} < \infty
\end{aligned} \tag{۸۷}$$

فرض کنید که $t = u^q$ در I_{42} توجه کنید که برای $q < 2$ داریم:

$$\begin{aligned}
&\int_{d_n}^{\infty} u^{q-3} EX_{nk}^2 (d_n < |X_{nk}| \leq u) du \\
&= \int u^{q-3} EX_{nk}^2 I(|X_{nk}| > d_n) \cdot I(|X_{nk}| \leq u) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[X_{nk}^2 I(|X_{nk}| > d_n) \int_{|X_{nk}|}^{\infty} u^{q-3} I(|X_{nk}| \leq u) du \right] \\
&= E \left[X_{nk}^2 I(|X_{nk}| > d_n) \int_{|X_{nk}|}^{\infty} u^{q-3} du \right] \\
&\leq CE |X_{nk}|^q I(|X_{nk}| > d_n).
\end{aligned} \tag{۸۸}$$

سپس، بنابر لم $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{E |X_{nk}|^u I(|X_{nk}| > a_n)}{a_n^u} \right)^r < \infty$ و $d_n > a_n$ ، رابطه (۸۹) را داریم:

$$\begin{aligned}
I_{42} &= C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n a_n^{-q} \int_{d_n}^{\infty} u^{q-3} EX_{nk}^2 I(d_n < |X_{nk}| \leq u) du \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n a_n^{-q} E |X_{nk}|^q I(d_n < |X_{nk}| \leq a_n) < \infty
\end{aligned} \tag{۸۹}$$

نتیجه گیری شد که این اثبات قضیه ۴-۱ را کامل می کند.

قضیه ۴-۲: فرض کنید $\{X_{nk}, k \geq 1, n \geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی NSD باشد و فرض کنید که $\{a_n, n \geq 1\}$ یک دنباله از اعداد حقیق مثبت باشد به نحوی که همچنین فرض کنید که $a_n \uparrow \infty$ یک تابع مثبت باشد که در شرط

$$|t| \uparrow \quad \frac{\psi_k(|t|)}{|t|^p} \downarrow \quad \frac{\psi_k(|t|)}{|t|^q} \uparrow \quad \text{برای } 1 \leq q < p \text{ و } p > 2 \text{ صدق می کند. آنگاه از شرطهای:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n E \left(\frac{X_{nk}}{a_n} \right)^2 \right)^{v/2} < \infty \quad \text{و} \quad EX_{nk} = 0 \quad k \geq 1, n \geq 1 \tag{۹۰}$$

برای هر $\varepsilon > 0$ ، رابطه (۹۱) نتیجه می شود.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n E \left\{ b_n |Z_n| - \varepsilon \right\}_q^+ < \infty \tag{۹۱}$$

به منظور اثبات ادعای فوق، بعد از نمادگذاری، بنابر بحث مشابه اثبات قضیه ۴-۱، می توانیم ثابت کنیم که $I_1 < \infty, I_3 < \infty$ و رابطه (۹۲) به صورت آنچه که در ادامه مشاهده می شود برقرار است. بنابراین:

$$\begin{aligned}
&P \left(\max_{1 \leq j \leq n} \left| \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^j X_{nk} \right| > \varepsilon \right) \\
&\leq P \left(\max_{1 \leq j \leq n} |X_{nk}| < a_n \right) + P \left(\max_{1 \leq j \leq n} |T_j^{(n)}| > \varepsilon - \max_{1 \leq j \leq n} \left| \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^j EX_k^{(n)} \right| \right)
\end{aligned} \tag{۹۲}$$

۹

$$\leq \sum_{k=1}^n \frac{E |X_{nk}|^q I(|X_{nk}| > a_n)}{a_n^q} \rightarrow \infty \quad p \left[\max_{1 \leq j \leq n} \left| \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^j X_{nk} \right| > \varepsilon \right]$$

زمانی که $n \rightarrow \infty$ میل می کند، روابط فوق برقرار هستند. برای تکمیل اثبات، تنها لازم است که ثابت کنیم $I_4 < \infty$.

فرض کنید $\delta \geq p$ و $d_n = [a_n] + 1$. بنابر $P \left\{ M_n(Y) > t^{1/q} \right\} \leq P \left\{ \max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{k=1}^j (Y_{nk} - EY_{nk}) \right| > \frac{t^{1/q}}{2} \right\}$ ، نابرابری

مارکوف، لم $p > 2$ $E \left(\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k X_i \right|^p \right) \leq 2 \left(\frac{15p}{1np} \right)^p \left[\sum_{i=1}^n E |X_i|^p + \left(\sum_{i=1}^n EX_i^2 \right)^{p/2} \right]$ و C_r - نابرابری نشان داده شده در رابطه (۹۳) را بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} I_4 &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-q} \int_{a_n^q}^{\infty} t^{-\delta/q} E \max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{k=1}^j (Y_{nk} - EY_{nk}) \right|^{\delta} dt \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-q} \int_{a_n^q}^{\infty} t^{-\delta/q} \left[\sum_{k=1}^n E |Y_{nk}|^{\delta} + \left(\sum_{k=1}^n EY_{nk}^2 \right)^{\delta/2} \right] dt \\ &= C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n a_n^{-q} \int_{a_n^q}^{\infty} t^{-\delta/q} E |Y_{nk}|^{\delta} dt + C \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-q} \int_{a_n^q}^{\infty} t^{-\delta/q} \left(\sum_{k=1}^n EY_{nk}^2 \right)^{\delta/2} dt \\ &\square I_{43} + I_{44} \end{aligned} \quad (93)$$

برای I ، داریم:

$$\begin{aligned} I_{43} &= C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n a_n^{-q} \int_{a_n^q}^{\infty} t^{-\delta/q} E |X_{nk}|^{\delta} I(|X_{nk}| \leq d_n) dt \\ &\quad + C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n a_n^{-q} \int_{a_n^q}^{\infty} t^{-\delta/q} E |X_{nk}|^{\delta} I(d_n < |X_{nk}| \leq t^{1/q}) dt \\ &\square I'_{43} + I''_{43} \end{aligned} \quad (94)$$

بر اساس بحث مشابه اثبات $I_{41} < \infty$ و $I_{42} < \infty$ (با جابجا کردن نمای ۲ با δ)، می توانیم مطابق با رابطه (۹۵) که در ادامه آمده است، $I'_{43} < \infty$ ، $I''_{43} < \infty$ را بدست آوریم. در نتیجه، برای I_{44} چون $\delta > 2$ مشاهده می شود که:

$$\begin{aligned} I_{44} &= C \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-q} \int_{a_n^q}^{\infty} t^{-\delta/q} \left(\sum_{k=1}^n EX_{nk}^2 I(|X_{nk}| \leq a_n) + \sum_{k=1}^n EX_{nk}^2 I(a_n < |X_{nk}| \leq t^{1/q}) \right)^{\delta/2} dt \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-q} \int_{a_n^q}^{\infty} t^{-\delta/q} \left(\sum_{k=1}^n EX_{nk}^2 I(|X_{nk}| \leq a_n) \right)^{\delta/2} dt \\ &\quad + C \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-q} \int_{a_n^q}^{\infty} \left(t^{2/q} \sum_{k=1}^n EX_{nk}^2 I(a_n < |X_{nk}| \leq t^{1/q}) \right)^{\delta/2} dt \\ &\square I'_{44} + I''_{44}. \end{aligned} \quad (95)$$

چون $\delta \geq p > q$ است، بنابراین از طریق $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n E \frac{\psi_k(X_{nk})}{\psi_k(a_n)} < \infty$ ، رابطه (۹۶) را به صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned} I'_{44} &= C \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-q} \left(\sum_{k=1}^n EX_{nk}^2 I(|X_{nk}| \leq a_n) \right)^{\delta/2} \int_{a_n^q}^{\infty} t^{-\delta/q} dt \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{EX_{nk}^2 I(|X_{nk}| \leq a_n)}{a_n^2} \right)^{\delta/2} \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{EX_{nk}^2}{a_n^2} \right)^{\delta/2} < \infty. \end{aligned} \quad (96)$$

سپس ثابت می‌کنیم که $I_{44}'' < \infty$ برای شروع، حالت $1 \leq q \leq 2$ را در نظر می‌گیریم. چون $\delta > 2$ ، بنابر لم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{E|X_{nk}|^u I(|X_{nk}| > a_n)}{a_n^u} \right)^r < \infty \quad \text{داریم:}$$

$$\begin{aligned} I_{44}'' &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-q} \int_{a_n^q}^{\infty} \left(t^{-1} \sum_{k=1}^n E|X_{nk}|^q I(a_n < |X_{nk}| \leq t^{1/q}) \right)^{\delta/2} dt \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-q} \int_{a_n^q}^{\infty} \left(t^{-1} \sum_{k=1}^n E|X_{nk}|^q I(|X_{nk}| > a_n) \right)^{\delta/2} dt \\ &= C \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-q} \left(\sum_{k=1}^n E|X_{nk}|^q I(|X_{nk}| > a_n) \right)^{\delta/2} \int_{a_n^q}^{\infty} t^{-\delta/2} dt \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{E|X_{nk}|^q I(|X_{nk}| > a_n)}{a_n^q} \right)^{\delta/2} < \infty \end{aligned} \quad (97)$$

در نهایت، ثابت می‌کنیم که در حالت $2 < q < p$ ، داریم: $I_{44}'' < \infty$. چون $\delta > q$ و $\delta > 2$ ، بر اساس لم بیان شده، رابطه (۹۸) را به صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned} I_{44}'' &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-q} \int_{a_n^q}^{\infty} \left(t^{-2/q} \sum_{k=1}^n EX_{nk}^2 I(|X_{nk}| > a_n) \right)^{\delta/2} dt \\ &= C \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-q} \int_{a_n^q}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n EX_{nk}^2 I(|X_{nk}| > a_n) \right)^{\delta/2} \int_{a_n^q}^{\infty} t^{-\delta/q} dt \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{EX_{nk}^2 I(|X_{nk}| > a_n)}{a_n^2} \right)^{\delta/2} < \infty \end{aligned} \quad (98)$$

بنابراین نتیجه مطلوب را بدست می‌آوریم.

۵- نتیجه‌گیری

آنچه که در این تحقیق به عنوان چارچوب اصلی در نظر گرفته شد وابسته منفی بودن متغیرهای تصادفی است که به تفصیل در مورد آنها اشاره شد، بدین ترتیب، همواره باید متغیرهایی را در نظر بگیریم که اثر تابع غیرنزولی بر هر دو متغیر تصادفی مفروض دارای کوواریانس با مقداری منفی یا صفر باشند و چنانچه این شرایط برای متغیرهای تصادفی برقرار نباشد، مطالعه براساس سایر مفروضات حائز اهمیت این تحقیق نمی‌باشد. همچنین، ابتدا اصول اساسی نظریه احتمال و نیز انواع همگرایی و همچنین انواع وابستگی در مورد متغیرهای تصادفی مورد مطالعه قرار گرفت و سپس با استفاده از این اصول اساسی موضوعات مطرح شده در مقالات مورد تحلیل قرار گرفته و با استدلال و استنتاج ریاضی و یافتن روابط بین اطلاعات جمع‌آوری شده و جمع‌بندی نتایج حاصل، تجزیه و تحلیل انجام شده است. در این مقاله، وابستگی متغیرهای تصادفی به عنوان یک مفهوم نه تنها در بعضی از شاخه‌های نظریه آمار و احتمال مانند زنجیره مارکوف، بلکه در مسائل کاربردی نیز دیده شد و توسعه پیدا کرد. قضایای اثبات شده در رابطه با همگرایی کامل گشتاوری نیز به خوبی نشان داده است که نتایج حاصل از پژوهش‌های

پیشین و برخی از نتایج منتصب به متغیرهای تصادفی، بهبود یافته و بسط دادن رویکرد مورد مطالعه در این تحقیق، از نکات مثبت آن محسوب می شود.

منابع

- [۱] Alam, K, Saxena, KML: Positive dependence in multivariate distributions. Commun. Stat., Theory Methods ۱۰, ۱۱۸۳-۱۱۹۶ (۱۹۸۱).
- [۲] Amini, M and Bozorgnia, A: "Complete convergence for negatively dependent random variables," Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, vol. ۱۶, no. ۲, pp. ۱۲۱-۱۲۶, ۲۰۰۳.
- [۳] Chen, PY, Sung, SH: On the strong convergence for weighted sums of negatively associated random variables. Stat.Probab. Lett. ۹۲, ۴۵-۵۲ (۲۰۱۴).
- [۴] Chen, Y, Chen, A, and Ng, KW: "The strong law of large numbers for extended negatively dependent random variables", Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicasy Naturals A, vol. ۱۰۷, pp.۲۵۷-۲۷۱, ۲۰۱۲.
- [۵] Chen, Y, Chen, A and Ng, KW: "The strong law of large numbers for extended negatively dependent random variables," Journal of Applied Probability, vol. ۴۷, no. ۴, pp. ۹۰۸-۹۲۲, ۲۰۱۰.
- [۶] Chow, YS: "On the rate ofmoment convergence of sample sums and extremes," Bulletin of the Institute of Mathematics. Academia Sinica, vol. ۱۶, no. ۳, pp. ۱۷۷-۲۰۱, ۱۹۸۸.
- [۷] Christofides, TC, Vaggelatou, E: A connection between supermodular ordering and positive/negative association. J. Multivar. Anal. ۸۸, ۱۳۸-۱۵۱ (۲۰۰۴).
- [۸] Dehua, Q, Chang, KC, Giuliano Antonini, R and Volodin, A: "On the strong rates of convergence for arrays of rowwise negatively dependent randomvariables," StochasticAnalysis and Applications, vol. ۲۹, no. ۳, pp. ۳۷۵-۳۸۵, ۲۰۱۱.
- [۹] Ebrahimi, N and Ghosh, M "Multivariate negative dependence. Communications in Statistics A, vol. ۱۰, no. ۴, pp. ۳۰۷-۳۳۷, ۱۹۸۱.
- [۱۰] Eghbal, N, Amini, M, Bozorgnia, A: Some maximal inequalities for quadratic forms of negative superadditive dependence random variables. Stat. Probab. Lett. ۸۰, ۵۸۷-۵۹۱ (۲۰۱۰).
- [۱۱] Gan, SX, Chen, PY: "Strong convergence rate of weighted sums for negatively orthant dependent sequences," Acta Mathematica Scientia A, vol. ۲۸, no. ۲, pp. ۲۸۳-۲۹۰, ۲۰۰۸ (Chinese).
- [۱۲] Gan, S and Chen, P: "On the limiting behavior of the maximum partial sums for arrays of rowwise NA random variables," Acta Mathematica Scientia B, vol. ۲۷, no. ۲, pp. ۲۸۳-۲۹۰, ۲۰۰۷.
- [۱۳] Hsu, PL, Robbins, H: "Complete convergence and the law of large numbers," Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. ۳۳, pp. ۲۵-۳۱, ۱۹۴۷.
- [۱۴] Hu, TZ: Negatively superadditive dependence of random variables with applications. Chinese J. Appl. Probab. Statist. ۱۶, ۱۳۳-۱۴۴ (۲۰۰۰).
- [۱۵] Hu, TC and Taylor, RL: "On the strong law for arrays and for the bootstrapmean and variance," International Journal ofMathematics andMathematical Sciences, vol. ۲۰, no. ۲, pp. ۳۷۵-۳۸۲, ۱۹۹۷.
- [۱۶] Joag-Dev, K, Proschan, F: "Negative association of random variables, with applications," The Annals of Statistics, vol. ۱۱, no. ۱, pp. ۲۸۶-۲۹۵, ۱۹۸۳.

- [۱۷] Kemperman, JHB: On the FKG-inequalities for measures on a partially ordered space. Proc. K. Ned. Akad. Wet., Ser. A, Indag. Math. ۸۰, ۳۱۳-۳۳۱ (۱۹۷۷).
- [۱۸] Ko, MH, Han, KH and Kim, TS: "Strong laws of large numbers for weighted sums of negatively dependent random variables," Journal of the Korean Mathematical Society, vol. ۴۳, no. ۶, pp. ۱۳۲۵-۱۳۳۸, ۲۰۰۶.
- [۱۹] Ko, MH and Kim, TS: "Almost sure convergence for weighted sums of negatively orthant dependent random variables," Journal of the Korean Mathematical Society, vol. ۴۲, no. ۵, pp. ۹۴۹-۹۵۷, ۲۰۰۵.
- [۲۰] Liu, L. "Precise large deviations for dependent random variables with heavy tails," Statistics and Probability Letters, vol. ۷۹, no. ۹, pp. ۱۲۹۰-۱۲۹۸, ۲۰۰۹.
- [۲۱] Liv, L "Precise large deviations for dependent random variables with heavy tails", Statistics and Probability Letters, vol. ۷۹, no. ۹, pp. ۱۲۹۰-۱۲۹۸, ۲۰۰۹.
- [۲۲] Qiu, D, Chen, P, Antonini, RG and Volodin, A. "On the complete convergence for arrays of rowwise extended negatively dependent random variables," Journal of the Korean Mathematical Society, vol. ۵۰, no. ۲, pp. ۳۷۹-۳۹۲, ۲۰۱۳.
- [۲۳] Shao, QM: Almost sure invariance principles for mixing sequences of random variables. Stoch. Process. Appl. ۴۸(۲), ۳۱۹-۳۳۴ (۱۹۹۳)
- [۲۴] Shen, Y, Wang, XJ, Yang, WZ, Hu, SH: Almost sure convergence theorem and strong stability for weighted sums of NSD random variables. Acta Math. Sin. Engl. Ser. ۲۹(۴), ۷۴۳-۷۵۶ (۲۰۱۳)
- [۲۵] Shen, AT: "On the strong convergence rate for weighted sums of arrays of rowwise negatively orthant dependent random variables," Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales A, vol. ۱۰۷, pp. ۲۵۷-۲۷۱, ۲۰۱۲.
- [۲۶] Sung, SH "Complete convergence for sums of arrays of random elements," International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, vol. ۲۳, no. ۱۱, pp. ۷۸۹-۷۹۴, ۲۰۰۰.
- [۲۷] Taylor, RL, Patterson, RF and Bozorgnia, A: "A strong law of large numbers for arrays of rowwise negatively dependent random variables," Stochastic Analysis and Applications, vol. ۲۰, no. ۳, pp. ۶۴۳-۶۵۶, ۲۰۰۲.
- [۲۸] Vu, YF, Ordonez-Cabrea, M and Volodin, A: "On limiting behavior for arrays of row wise negatively orthant dependent random variables" Jurnal of Korean Statistical Society, vol. ۴۲, pp. ۶۱-۷۰, ۲۰۱۳.
- [۲۹] Wu, YF, Ordóñez-Cabrera, M and Volodin, A: "On limiting behavior for arrays of rowwise negatively orthant dependent random variables," Journal of the Korean Statistical Society, vol. ۴۲, pp. ۶۱-۷۰, ۲۰۱۳.
- [۳۰] Wu, QY: A complete convergence theorem for weighted sums of arrays of rowwise negatively dependent random variables. J. Inequal. Appl. ۲۰۱۲, Article ID ۵۰ (۲۰۱۲)
- [۳۱] Wu, Y and Guan, M: "Convergence properties of the partial sums for sequences of end random variables", Journal of the Korean Mathematical Society, vol. ۴۹, no. ۶, pp. ۱۰۴۷-۱۱۱۰, ۲۰۱۲.
- [۳۲] Wu, YF and Zha, DJ: "Convergence properties of partial sums for arrays of row wise negatively orthant dependent random variables". Journal of the Korean Statistical Society, vol. ۳۹, no. ۲, ۲۰۱۰.
- [۳۳] Wa, Q. "Complete convergence for negatively dependent sequences of random variables", Journal of Inequalities and Applications, vol. ۲۰۱۰, Article ID ۵۰۷۲۹۳, ۱۰ pages, ۲۰۱۰.
- [۳۴] Wu, QY: Probability Limit Theory for Mixing Sequences. Science Press of China, Beijing (۲۰۰۶).

- [۳۵] Wang, XJ, Shen, AT, Chen, ZY, Hu, SH: Complete convergence for weighted sums of NSD random variables and its application in the EV regression model. TEST ۲۴, ۱۶۶-۱۸۴ (۲۰۱۵).
- [۳۶] Wang, XJ, Deng, X, Zheng, LL, Hu, SH: Complete convergence for arrays of rowwise negatively superadditive dependent random variables and its applications. Statistics ۴۸(۴), ۸۳۴-۸۵۰ (۲۰۱۴).
- [۳۷] Yang, SC: Maximal moment inequality for partial sum of strong mixing sequences and application. Acta Math. Sin. Engl. Ser. ۲۳(۶), ۱۰۱۳-۱۰۲۴ (۲۰۰۷).